A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i dos problemes. Heu de respondre només tres de les quatre qüestions i resoldre només un dels dos problemes (podeu triar les qüestions i el problema que vulgueu).

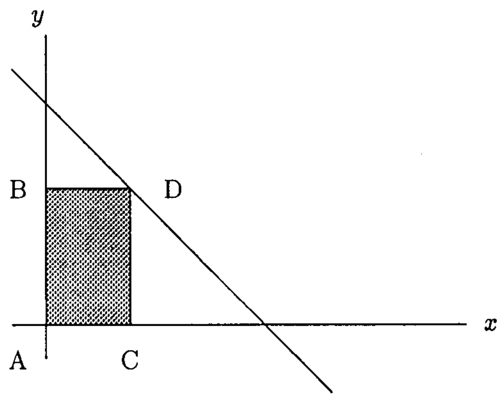
QÜESTIONS

1. Trobeu el valor de k per tal que

$$\int_{k+1}^{2k} \frac{dx}{x - k} = 3$$

[2 punts]

2. Considereu els rectangles del pla, els vèrtexs A, B, C i D dels quals compleixen les condicions següents: a) A és l'origen de coordenades; b) B és a sobre del semieix de les $y > 0$; c) C és a sobre del semieix de les $x > 0$; d) D és a sobre de la recta d'equació $2x + y = 1$, tal com es veu en la figura següent:



D'entre tots aquests rectangles, trobeu l'àrea del que la té màxima. [2 punts]

3. Siguin $\vec{u}$ i $\vec{v}$ els dos vectors del pla:

$$\vec{u} = (1,\ 1) \qquad \vec{v} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3},\ 1 - \sqrt{3})$$

Calculeu l'angle que formen $\vec{u}$ i $\vec{v}$. [2 punts]

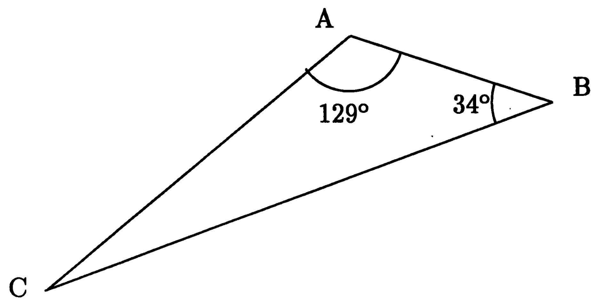
4. Discutiu el sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} ax & - & y & + & 2z & = & (2 - a) \\ 2x & + & 3y & - & z & = & -3a \\ x & + & 2y & - & z & = & -2a \end{array}\right\}$$

segons els valors del paràmetre a. [2 punts]

PROBLEMES

1. Des dels dos extrems de la badia d'Alcúdia (Mallorca), que són a 15,25 km l'un de l'altre, es pot veure el cim del Puig Major. Un equip de topògrafs ha pres les mides dels angles que es poden veure en el croquis següent:



on *A* i *B* són els dos extrems de la badia i *C*, el peu del cim. A més, l'angle d'elevació del cim vist des del punt *A* és de 3º.

Calculeu:
a) L'angle entre la línia *AC* i la línia *BC*.
b) Les distàncies de *A* a *C* i de *B* a *C*.
c) L'alçària del cim.

[4 punts: 1 els apartats a) i c), 2 l'apartat b)]

2. Donat el pla π d'equació $x + 4y + z = 8$ i sent *A, B* i *C* els punts d'intersecció d'aquest pla amb els eixos de coordenades *OX, OY* i *OZ,* respectivament:

a) Determineu les coordenades dels punts *A, B* i *C*.
b) Determineu les equacions de la recta perpendicular al pla π que passa per l'origen de coordenades.
c) Calculeu el volum del tetràedre determinat per *OABC,* on *O* és l'origen de coordenades.
d) Calculeu la distància de l'origen de coordenades al pla π. Determineu l'àrea del triangle *ABC* (podeu utilitzar el volum calculat en l'apartat anterior).

[4 punts: 1 cada apartat]

A continuació trobareu l'enunciat de quatre qüestions i dos problemes. Heu de respondre només tres de les quatre qüestions i resoldre només un dels dos problemes (podeu triar les qüestions i el problema que vulgueu).

QÜESTIONS

1. Les diagonals d'un paral·lelogram mesuren 30 cm i 20 cm i es tallen formant un angle de 40º. Calculeu-ne els costats. [2 punts]

2. Donat el pla π d'equació $2x - y + 2z = 4$ i el punt $H = (1, 3, -2)$, determineu les coordenades de la projecció ortogonal de H sobre π. (Recordeu que la projecció ortogonal d'un punt H sobre un pla π és el peu de la perpendicular a π traçada des de H.) [2 punts]

3. Calculeu l'àrea limitada per les corbes $y = e^x$, $y = e^{-x}$ i la recta vertical $x = 2$. [2 punts]

4. Trobeu el punt de la gràfica de $y = x + \ln x$ tal que la recta tangent sigui perpendicular a la recta $2x + 6y = 5$. [2 punts]

PROBLEMES

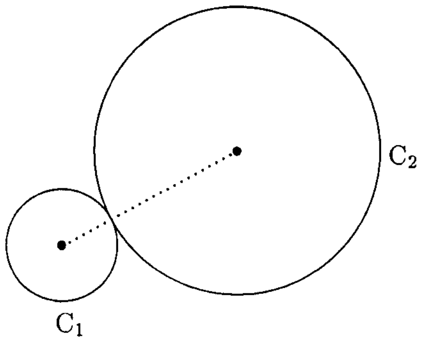
1. Sigui $f(x) = \dfrac{x + 5}{x^2 - 9}$

   a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 2$.
   b) Estudieu el domini de definició de $f(x)$ i les asímptotes.
   c) Estudieu els intervals de creixement i decreixement. Feu-ne la representació gràfica.

[4 punts: 1 els apartats a) i b), 2 l'apartat c)]

2. Considereu dues circumferències C_1 i C_2 del pla que compleixen les condicions següents:

   • C_1 passa pel punt $P = (2, 0)$ i en aquest punt té per tangent la recta $y = x - 2$.
   • El centre de C_1 és a sobre de la recta $y = x$.
   • C_2 té per equació $x^2 + y^2 - 8x - 8y = k$, on k és una certa constant.
   • Les circumferències C_1 i C_2 són tangents exteriors, tal com s'indica en la figura següent:



   a) Calculeu el centre i el radi de C_1 i escriviu l'equació de C_1.
   b) Calculeu les coordenades del centre de C_2.
   c) Calculeu les coordenades del punt d'intersecció de C_1 amb C_2.
   d) Calculeu el valor de la constant k de l'equació de C_2.

[4 punts: 1 cada apartat]