SÈRIE 3

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

- En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
- La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
- En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
- **Penalització per errades de càlcul:**
  - Si l'errada de càlcul que es comet no té més transcendència, es descomptaran 0,125 punts de la puntuació parcial que correspongui.
  - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà la penalització fruit de l'errada (0,125 punts).
  - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima serà la parcial corresponent i es descomptaran els 0,125 punts.
  - Si la resolució d'un apartat conté dues errades es descomptaran 0,25 punts del que s'estigui resolent i no es valorarà la resta de l'apartat. En cap cas un apartat tindrà una puntuació negativa.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+4y+4z & = & 4k-7 \\ 2x-ky & = & -1 \\ -2x & = & k+1 \end{array}\right\}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre real *k*.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per al cas $k = 0$.
[1 punt]

Resolució:

a) La matriu de coeficients i l'ampliada, *A* i *A'*, són les següents:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -k & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 4k-7 \\ -1 \\ k+1 \end{matrix} \end{array}\right)}_{A'}$$

Estudiem primer per a quins valors del paràmetre *k* el *rang*(*A*) és màxim. Per a això calcularem *det*(*A*) i estudiarem quan s'anul·la.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -k & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8k.$$

Per tant, el determinant d'*A* s'anul·la només en el cas *k* = 0. Per tant, tenim els següents dos casos.

Cas I: $k \neq 0$

En aquest cas, tenim *rang*(*A*) = 3, per tant *rang*(*A'*) =3 = nombre d'incògnites. Per tant, el sistema és Compatible Determinat.

Cas II: *k* = 0

En aquest cas la matriu del sistema és

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} -7 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)}_{A'}$$

Com que *det*(*A*) = 0, rang(*A*) < 3, però el menor $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ ens diu que *rang*(*A*) = 2.

Per a saber el rang de la matriu ampliada orlem el menor anterior i calculem el determinant.

Com que $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0 \Rightarrow rang(A') = 2 = rang(A)$ i per tant el sistema és Compatible Indeterminat amb 1 (3-2) grau de llibertat.

En resum:

- Si $k \neq 0$: Sistema Compatible Determinat.
- Si *k* = 0: Sistema Compatible Indeterminat amb un 1 grau de llibertat.

b)
***k* = 0.**
És el cas II de l'apartat anterior en el qual ja hem vist que el sistema era Compatible Indeterminat amb 1 grau de llibertat. Per la matriu resultat, tenim que el sistema inicial és equivalent al sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x+4y &=& -7-4z \\ 2x &=& -1 \end{array}\right\}$$

D'on podem obtenir $x=\frac{-1}{2}$ i substituïnt a la primera equació $-1+4y=-7-4z$ d'on tenim $y=-\frac{6+4z}{4}=-\frac{3+2z}{2}$, utilitzant la variable z com a indeterminada. Així doncs, la solució en el cas *k* = 0 són els punts de la forma $\boxed{\left(\frac{-1}{2},\frac{-3-2z}{2},z\right)}$

Pautes de correcció:
Apartat a)
0,5 punts pel plantejament inicial fins al valor crític de *k*.
0,25 punts pel cas I.
0,25 punts pel cas II.
Apartat b)
0,5 punts pel plantejament fins a indicar que el sistema és Compatible Indeterminat.
0,5 punts per l'expressió de la solució per a $k=0$.

---

2. A R^3, siguin la recta r que per equació $(x,y,z)=(1+\lambda,\lambda,1-\lambda)$ i el pla π d'equació $2x-y+z=-2$.

a) Determineu la posició relativa de la recta *r* i el pla π.
[1 punt]
b) Calculeu la distància entre la recta *r* i el pla π.
[1 punt]

Resolució:

a) Els punts de la recta *r* són de la forma $(1+\lambda,\lambda,1-\lambda)$ per tant *r* és la recta que passa pel punt *P* = (1,0,1) i que té vector director $v_r=(1,1,-1)$.

Per altra banda, el vector normal del pla està format pels coeficients *A*, *B* i *C* de l'equació cartesiana i és $n=(2,-1,1)$.

Si fem el producte escalar $v_r\cdot n=(1,1,-1)\cdot(2,-1,1)=2-1-1=0$, per tant són dos vectors ortogonals (perpendiculars) entre sí amb la qual cosa tenim que la recta *r* és paral·lela al pla π. Com que el punt *P* no satisfà l'equació del pla π, la recta queda paral·lela exterior (no continguda) al pla.

Observació: El paral·lelisme també pot ser demostrat via la resolució del sistema d'equacions lineals format per la recta i el pla i veient que és un Sistema Incompatible.

b) Per a fer la distància de *r* a π, com que són paral·lels, és suficient agafar un *P* de *r* i fer $d(P,\pi)$

Així tenim $\boxed{d(r,\pi)}=d(P,\pi)=\frac{|2\cdot 1-1\cdot 0+1\cdot 1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\boxed{\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}}$.

Observació: En lloc d'aplicar una fórmula també es pot calcular el punt *Q* projecció perpendicular de *P* sobre π i calcular *d*(*P*,*Q*).

Pautes de correcció:
Apartat a)
0,25 punts per la identificació de la recta *r*, a partir d'un punt i un vector director.
0,25 punts per veure el vector normal del pla.
0,25 punts pel producte escalar igual a 0 i deduir el paral·lelisme.
0,25 punts per veure que la recta no està inclosa en el pla.
Apartat b)
0,50 punts per indicar que la distància es pot fer a partir d'un punt de *r*.
0,5 punts per la substitució i càlcul final (no cal eliminar els radicals del denominador).

---

3. Sigui la funció $f(x) = x\, e^{x-1}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció *f* en el punt d'abscissa *x* = 1.
[1 punt]

b) Determineu en quins intervals la funció *f* és creixent i en quins intervals és decreixent.
[1 punt]

Resolució:

a) En un punt *x* = *a*, l'equació de la recta tangent a una funció *f* té l'expressió

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

En el nostre cas tenim $f(x) = x\, e^{x-1}$ i $a = 1$
La funció derivada *f'*(*x*) és $f'(x) = 1 \cdot e^{x-1} + x \cdot e^{x-1} = (1+x)e^{x-1}$.

Tenim doncs: *a* = 1, $f(a) = f(1) = 1\, e^0 = 1$, i $f'(a) = f'(1) = 2\, e^0 = 2$.

Per tant la recta tangent és $\boxed{y} = 2 \cdot (x-1) + 1 \boxed{= 2x-1}$.

b) Com que la funció *f* és derivable en tot el seu domini, la funció creixerà allà on la derivada sigui positiva i decreixerà allà on la derivada sigui negativa.

Tenim que $f'(x) = (1+x)e^{x-1}$. Mirem si la funció s'anul·la en algun punt.
$f'(x) = 0$ porta a que 1+*x* = 0 i per tant *x* = -1.

Si $x < -1 \Rightarrow 1 + x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ i per tant la funció és decreixent.
Si $x > -1 \Rightarrow 1 + x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ i per tant la funció és creixent.

$\boxed{\text{La funció és decreixent en l'interval } (-\infty, -1) \text{ i és creixent en l'interval } (-1, \infty).}$

Pautes de correcció:
Apartat a)
0,25 punts per la fórmula de la recta tangent.
0,25 punts pels càlculs de *f*(*a*) i *f'*(*a*).
0,25 punts per la substitució
0,25 punts per l'equació final.
Apartat b)
0,25 punts pel plantejament a partir del signe de la funció derivada.
0,25 punts pel punt on s'anul·la la derivada.
0,25 punts per l'interval on la funció és decreixent.
0,25 punts per l'interval on la funció és creixent.

4. Responeu a les qüestions següents.

a) Calculeu totes les matrius de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfan la igualtat $A^2 + A = 2I$, en què I és la matriu identitat $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Justifiqueu que si A és una matriu quadrada que compleix la igualtat $A^2 + A = 2I$, aleshores A és invertible, i calculeu l'expressió de A^{-1} en funció de les matrius A i I.

[1 punt]

Resolució:

a) La igualtat matricial que es planteja és

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que observem que és una igualtat que es compleix per a qualsevol valor de *m*.

Per tant, totes les matrius de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ satisfan la igualtat.

b) La igualtat de l'enunciat, traient factor comú, es pot reescriure així:

$$A \cdot (A + I) = 2I = (A + I) \cdot A$$

és a dir

$$\frac{A(A+I)}{2} = I = \frac{(A+I) \cdot A}{2}$$

$$A\frac{A+I}{2} = I = \frac{A+I}{2}A$$

Amb això ja tenim que la matriu A és invertible ja que hem trobat una matriu, en el nostre cas $\frac{A+I}{2}$, que multiplicada per la dreta i per l'esquerra per A dóna la matriu identitat. Per tant, $A^{-1} = \frac{A+I}{2}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)
0,25 punts per les primeres operacions matricials.
0,25 punts per les segones operacions matricials.
0,5 per identificar la igualtat terme a terme i concloure que la igualtat és certa independent de *m*.
Apartat b)
0,25 punts per la factorització.
0,25 punts per la deducció de la invertibilitat.
0,25 punts per l'expressió de la matriu inversa.
0,25 punts per l'argument que el producte ha de ser per la dreta i per l'esquerra.

5. Considereu el tetraedre que té per vèrtexs el punts $A = (x,0,1)$, $B = (0,x,1)$, $C = (3,0,0)$ i $D = (0,x,0)$ amb $0 < x < 3$.

a) Comproveu que el volum del tetraedre és donat per l'expressió
$V(x) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x)$.

[1 punt]

b) Determineu el valor de x que fa que el volum sigui màxim i calculeu aquest volum màxim.

[1 punt]

Resolució:

a) El volum del tetraedre de vèrtexs *ABCD* es pot calcular amb l'expressió

$$V = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$$

Calculem els tres vectors arestes: $\overrightarrow{AB} = (-x, x, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3-x, 0, -1)$ i $\overrightarrow{AD} = (-x, x, -1)$.
Per tant

$$V(x) = \frac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -x & 3-x & -x \\ x & 0 & x \\ 0 & -1 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|x^2 - x^2 + x(3-x)|$$

$$= \frac{1}{6}|x(3-x)|$$

Ara bé observem que $0 < x < 3$ i per tant l'expressió $x(3-x)$ serà sempre positiva i aleshores el seu valor absolut serà $x(3-x)$.

Tenim doncs $V(x) = \frac{1}{6}\big(x(3-x)\big) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x)$, com volíem demostrar.

Observació: El volum es pot calcular també a partir de l'àrea del triangle de la base i de l'alçada del tetraedre. La puntuació en aquest cas, que és una mica més llarg, es repartirà per igual entre els diferents passos.

b) Per a obtenir el volum màxim buscarem un punt que anul·li la derivada primera i que faci negativa la derivada segona.

$V(x) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x)$,
$V'(x) = \frac{1}{6}(-2x + 3)$ i
$V''(x) = \frac{1}{6}(-2) = \frac{-1}{3}$.
Els punts singulars vindran d'anul·lar la primera derivada.
Resolem l'equació $-2\text{x} + 3 = 0$ d'on obtenim que hi ha un únic candidat que és $x = \frac{3}{2}$.
Com que en substituir la derivada segona ens dóna negatiu, tenim

$x = \frac{3}{2}$ hi ha el màxim que se'ns demana.

I el volum màxim $V\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(-\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{-9}{4} + \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{8}$ unitats cúbiques

Pautes de correcció:
Apartat a)
0,50 punts pel càlcul dels vectors aresta.
0,25 punts pel càlcul del determinant (sense arribar al càlcul del valor absolut)
0,25 punts per l'argument del valor absolut a partir del signe del resultat del determinant.
Apartat b)
0,25 punts per les derivades.
0,25 punts pel plantejament d'anul·lar la derivada primera.
0,25 punts pel valor de *x* que maximitza el volum.
0,25 punts pel volum màxim.

---

6. Siguin les paràboles $f(x) = x^2 + k^2$ i $g(x) = -x^2 + 9k^2$.

a) Calculeu les abscisses, en funció de *k*, dels punts d'intersecció entre les dues paràboles.
[1 punt]

b) Calculeu el valor del paràmetre *k* perquè l'àrea compresa entre les paràboles sigui de 576 unitats quadrades.
[1 punt]

Resolució:

a) $f(x) = x^2 + k^2$ i $g(x) = -x^2 + 9k^2$.

És directe observar que la paràbola *f*(*x*) és la paràbola elemental x^2 desplaçada k^2 unitats, mentre que la paràbola *g*(*x*) és la paràbola elemental $-x^2$, desplaçada $9k^2$ unitats, totes dues simètriques respecte l'eix de les ordenades i de manera que al voltant de l'origen la paràbola *g*(*x*) està per sobre de la *f*(*x*). (Un dibuix ho il·lustra força bé).

Calculem les abscisses dels punts intersecció igualant *f*(*x*) = *g*(*x*) i obtenim $x^2 + k^2 = -x^2 + 9k^2$, o sigui $2x^2 = 8k^2$, per tant $\boxed{x = \pm 2k}$.

b) L'àrea compresa entre les dues paràboles serà doncs

$$A = \int_{-2k}^{2k} [(-x^2 + 9k^2) - (x^2 + k^2\,)]\,dx = 2\int_0^{2k} (-2x^2 + 8k^2)\,dx = 4\int_0^{2k} (-x^2 + 4k^2)\,dx$$

$$= 4\left(-\frac{x^3}{3} + 4k^2x\right)\Bigg]_{x=0}^{x=2k} = 4\left(-\frac{8k^3}{3} + 8k^3\right) = \frac{64k^3}{3}.$$

Per tant, el valor que demana l'enunciat haurà de satisfer l'equació $\frac{64k^3}{3} = 576$.

$$k^3 = 27 \Rightarrow \boxed{k = 3}$$

Observació: També es valorarà com a correcte si el plantejament de les funcions en l'integrant no té en compte quina està per sobre de quina però es discuteix al final el signe del resultat. Per tant, la puntuació pot ser la màxima sense haver representat cap figura ni haver discutit la posició relativa, sempre que s'indiqui correctament que cal prendre el valor absolut del resultat de la integral.

Pautes de correcció:
Apartat a)
0,5 punts pel plantejament de la igualtat a resoldre.
0,5 punts per l'obtenció de les dues abscisses $2k$ i $-2k$.
Apartat b)
0,25 punts pel plantejament de la integral.
0,25 punts pel càlcul de les primitives.
0,25 punts per la regla de Barrow
0,25 punts per la solució final.

SÈRIE 5

Responeu a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no s'autoritzarà l'ús de calculadores o altres aparells que portin informació emmagatzemada o que puguin transmetre o rebre informació.

Criteris generals per a la correcció:

- En tots els casos, s'ha de poder seguir la resolució que fa l'estudiant i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir com s'ha arribat fins a la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
- La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
- En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
- **Penalització per errades de càlcul:**
    - Si l'errada de càlcul que es comet no té més transcendència, aleshores es descomptarà 0,125 punts de la puntuació parcial que correspongui.
    - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i la coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà la penalització fruit de l'errada (0,125 punts).
    - En cas que l'errada faci que no acabi tenint sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima serà la parcial corresponent i es descomptaran 0,125 punts.
    - Si la resolució d'un apartat conté dues errades, es descomptaran 0,25 punts del que s'estigui resolent i no es valorarà la resta de l'apartat. En cap cas un apartat tindrà una puntuació negativa.

1. Considereu el sistema d’equacions lineals $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Expliqueu raonadament si les afirmacions següents són vertaderes o falses.

a) Si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, el sistema és compatible determinat i la solució és $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

[1 punt]

b) Si $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, el sistema és compatible indeterminat.

[1 punt]

Resolució:

a) L’afirmació és FALSA.

Denotem $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ la matriu de coeficients i calculem el rang de A:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & \frac{-5}{3} \end{vmatrix} = \frac{5}{3} + 6 + 4 - 3 - 2 - \frac{20}{3} = 0$ i el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, per tant $rang\ A = 2$.

En ser el sistema homogeni, perquè $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $rang\ A = rang\ A' = 2$, per tant, el sistema és compatible indeterminat, és a dir, té infinites solucions.

Naturalment $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és una solució, però no és l’única.

b) L’afirmació és FALSA.

El $rang\ A = 2$, però $rang\ A' = 3$ ja que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 3 - 4 + 3 - 1 + 4 = 4 \neq 0$. Per tant, el sistema és incompatible, no té cap solució.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts pel càlcul del rang A.

0,25 punts per la discussió del sistema.

0,25 punts per la conclusió raonada de falsedat.

Apartat b)

0,5 punts pel càlcul del rang de A´.

0,25 punts per la discussió del sistema.

0,25 punts per la conclusió raonada de falsedat.

2. Siguin a R^3 el pla π d'equació $x - y + 2z = 2$ i els punts $A = (3, -1, 2)$ i $B = (1, 1, -2)$.

c) Comproveu que els punts A i B són simètrics respecte del pla π.

[1 punt]

d) Si r és la recta dels punts P de la forma $P = B + \lambda v$ en què λ és un paràmetre real i $v = (1, 1, 0)$, verifiqueu que els punts mitjans dels segments $\overline{AP}$ pertanyen al pla π.

[1 punt]

Resolució:

a) Per veure que els punts A i B són simètrics respecte del pla π, comprovarem que el vector $\overrightarrow{AB}$ és perpendicular al pla π (és a dir, que el vector $\overrightarrow{AB}$ és proporcional al vector normal del pla) i que el punt mitjà del segment $\overline{AB}$ pertany al pla π.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 2, -4) \sim (1, -1, 2) = v_n}$$

Per altra banda, el punt mitjà del segment $\overline{AB}$ és $M = \frac{A+B}{2} = (2, 0, 0)$ que pertany al pla π ja que $\boxed{2 - 0 + 2 \cdot 0 = 2}$.

b) Tenim $P = (1, 1, -2) + \lambda(1, 1, 0) = (1 + \lambda, 1 + \lambda, -2)$.
Els punts mitjans del segments $\overline{AP}$ són de la forma

$$M = \frac{A + P}{2} = \frac{(4 + \lambda, \lambda, 0)}{2} = (2 + \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, 0)$$

Comprovem que les coordenades del punt M satisfan l'equació del pla:

$$\boxed{2 + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + 2 \cdot 0 = 2, \text{efectivament.}}$$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts pel vector $\overrightarrow{AB}$.

0,25 punts per la proporcionalitat amb el vector normal del pla.

0,25 punts pel càlcul del punt mitjà.

0,25 punts per la comprovació que el punt mitjà pertany al pla.

Apartat b)

0,5 punts per l'expressió dels punts de la recta.

0,25 punts per l'expressió dels punts mitjans.

0,25 punts per la comprovació de pertinença al pla.

3. Responeu a les qüestions següents:

a) Calculeu els màxims relatius, mínims relatius i punts d'inflexió de la funció $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

[1 punt]

b) Expliqueu raonadament que si $f(x)$ és una funció amb derivada primera contínua en l'interval $[a, b]$ i que satisfà que $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$, aleshores hi ha, com a mínim, un punt de l'interval (a, b) en què la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en aquest punt és horitzontal.

[1 punt]

Resolució:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 \quad f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \quad f''(x) = 12x - 18$

$f'(x) = 0 \iff 6x^2 - 18x + 12 = 0 \iff x = 1, x = 2$

$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Màxim relatiu en el punt } M = \left(1, f(1)\right) = (1, 1)}$

$f''(2) = +6 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Mínim relatiu en el punt } m = \left(2, f(2)\right) = (2, 0)}$

$$f''(x) = 0 \iff 12x - 18 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$$

Si $x < \frac{3}{2} \Rightarrow f''(x) < 0$ i, per tant, la funció és còncava.

Si $x > \frac{3}{2} \Rightarrow f''(x) > 0$ i, per tant, la funció és convexa.

Per tant, $\boxed{\text{punt d'inflexió en el punt } \left(\frac{3}{2}, f(\frac{3}{2})\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)}$

b) Si la funció *f* admet derivada primera contínua i $f'(a) > 0$ i $f'(b) < 0$, podem aplicar el teorema de Bolzano a la funció f' en l'interval $[a, b]$ ja que es tracta d'una funció contínua en un interval que experimenta un canvi de signe entre els extrems.
Aleshores el teorema de Bolzano ens assegura que hi ha, com a mínim, un punt en l'interval (a, b) en què la funció (aquí és la f') s'anul·la. I que f' s'anul·li vol dir exactament el que ens demana l'enunciat: que la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ sigui horitzontal.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,25 punts per les derivades.

0,25 punts pel punt de màxim relatiu.

0,25 punts pel punt de mínim relatiu.

0,25 punts pel punt d'inflexió.

Apartat b)

0,5 punts pel raonament que la funció derivada fa un canvi de signe en l'interval [a, b]

0,25 punts per aplicar el teorema de Bolzano a la funció derivada.

0,25 punts per identificar que derivada nul·la correspon a recta tangent horitzontal

4. Sigui A una matriu quadrada d'orde n que satisfà la propietat $A \cdot (A - I) = I$, en què I és la matriu identitat.

c) Justifiqueu que la matriu A és invertible i que $A^{-1} = A - I$.
[1 punt]

d) Calculeu el valor de a que fa que la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ compleixi la propietat $A \cdot (A - I) = I$. Calculeu A^{-1} i comproveu que es correspon amb la calculada a partir del resultat de l'apartat anterior.

[1 punt]

Resolució:

a) Si tenim que $A \cdot (A - I) = I$, aleshores $\det(A) \cdot \det(A - I) = \det(I) = 1$ i, per tant, $\boxed{\det(A) \neq 0 \text{ i, per tant, la matriu } A \text{ és invertible}}$.

La inversa de la matriu A serà aquella que multiplicada per A, per la dreta i per l'esquerra, doni la identitat I.

La matriu $(A - I)$ compleix aquesta propietat:

- $A \cdot (A - I) = I$ per hipòtesi de partida.
- $(A - I) \cdot A = A \cdot A - I \cdot A = A \cdot A - A \cdot I = A \cdot (A - I) = I$.

Observació: S'admet que l'estudiant pugui utilitzar en algun moment, de manera correcta, que $A \cdot B = I \Rightarrow B \cdot A = I$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 - a + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Per tant, $\left.\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ a & = & 0 \\ a & = & 0 \\ a^2 - a + 1 & = & 1 \end{array}\right\}$ que té solució $\boxed{a = 0}$ per a les quatre equacions.

Tenim, per tant, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$ que coincideix amb $\boxed{A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per l’argument d’invertibilitat.

0,25 punts pel producte en un ordre.

0,25 punts pel producte en l’altre ordre.

Apartat b)

0,25 punts pel càlcul matricial.

0,25 punts per la resolució del sistema.

0,25 punts pel càlcul de la inversa (sense utilitzar l’apartat a)).

0,25 punts per la comprovació amb el resultat de l’apartat a).

5. Siguin les rectes $r: (x, y, z) = (2, 3, -3) + \lambda(1, -1, 0)$ i $s: \frac{x-3}{2} = y - 5 = z + 2$.

c) Estudieu si les rectes r i s són paral·leles o perpendiculars.

[1 punt]

d) Determineu la posició relativa entre les rectes r i s i calculeu l'equació paramètrica de la recta t que talla perpendicularment la recta r i la recta s.

[1 punt]

Resolució:

a) Els vectors directors respectius són $v_r = (1, -1, 0)$ i $v_s = (2, 1, 1)$.

Observem que v_r i v_s no són proporcionals, per tant les rectes $\boxed{\text{r i s no són paral·leles}}$.
v_r i v_s no són perpendiculars ja que $v_r \cdot v_s = 2 - 1 + 0 = 1 \neq 0$, per tant les rectes $\boxed{\text{r i s no són perpendiculars}}$.

b) Mirem si les rectes *r* i *s* es tallen.

Igualem, per exemple, les equacions paramètriques

$$(2 + \lambda, 3 - \lambda, -3) = (3 + 2\mu, 5 + \mu, -2 + \mu)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2 + \lambda & = & 3 + 2\mu \\ 3 - \lambda & = & 5 + \mu \\ -3 & = & -2 + \mu \end{array}\right\}$$

De la tercera equació tenim $\mu = -1$, i substituint a la primera i a la segona obtenim $\lambda = -1$. $\boxed{\text{Per tant, les rectes } r \text{ i } s \text{ es tallen en el punt } (1, 4, -3)}$.

Si la recta *t* ha de tallar perpendicularment la recta *r* i *s*, *t* passa pel punt $(1, 4, -3)$ i té per vector director $v_r \times v_s$.

$$v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & 1 & 2 \\ j & -1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 3) \sim (1, 1, -3)$$

I, per tant, tenim: $\boxed{t: (x, y, z) = (1 + \alpha, 4 + \alpha, -3 - 3\alpha)}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per la resolució del no paral·lelisme.

0,5 punts per la resolució de la no perpendicularitat.

Apartat b)

0,25 punts per la posició relativa.

0,25 punts pel punt intersecció.

0,25 punts pel vector director de la recta *t*.

0,25 punts per l'equació paramètrica de la recta.

6. Sabem que una funció $f(x)$ té per derivada $f'(x)=(x+1)e^x$ i que $f(0)=2$.

c) Trobeu l'equació de la recta tangent a $y=f(x)$ en el punt de la corba amb abscissa $x=0$.

[1 punt]

d) Calculeu l'expressió de $f(x)$.

[1 punt]

Resolució:

a) Només cal aplicar la fórmula de l'equació de la recta tangent en un punt $(a, f(a))$: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

En aquest cas, $a=0$; $f(a)=2$ i $f'(a)=1$ i, per tant, l'equació demanada és:

$y-2=1(x-0)$, o sigui $\boxed{y=x+2}$

b) Calculem la primitiva pel mètode d'integració per parts:

$$u=x+1;\ du=dx;\ dv=e^x dx;\ v=e^x$$

$$f(x)=\int(x+1)e^x dx=uv-\int vdu=(x+1)e^x-\int e^x dx=$$

$$=(x+1)e^x-e^x=xe^x+e^x-e^x=xe^x+k$$

Com que $f(0)=2$, resulta que $2=f(0)=0e^0+k=k$ i, per tant, $\boxed{f(x)=xe^x+2}$.

Pautes de correcció:

Apartat a)

0,5 punts per la formulació de la recta tangent.

0,5 punts per la substitució i càlcul final.

Apartat b)

0,25 punts per la identificació dels termes d'integració per parts.

0,25 punts pel primer pas d'integració per parts.

0,25 punts pel pas final d'integració.

0,25 punts per calcular k i l'expressió final de f.