Sèrie 6 Matemàtiques PAAU–00

Pautes de correcció

Avalueu cada pregunta en punts i mitjos punts, però no en altres decimals (ara bé, dins de cada pregunta podeu utilitzar altres decimals per als diferents apartats i arrodonir després la suma). Aquestes pautes no pretenen planificar tots els casos que en la pràctica es poden presentar. Hi haurà molts casos concrets, doncs, en què serà difícil aplicar els criteris que s'exposen a continuació. Apliqueu-los en els casos clars. En els casos en què les pautes siguin de difícil aplicació, feu valdre sempre el vostre criteri i sentit comú.

Qüestions

1. L'expressió de $f(x)$ serà

$$f(x) = \begin{cases} 2x + C & \text{si } x < 1 \\ -x + K & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Com que $f(x)$ és contínua en tot punt, fent $x = 1$ a les dues expressions de $f(x)$ s'haurà de complir que $2 + C = -1 + K$. O sigui, $K = 3 + C$. Per altra banda, com que $f(-1)$ ha de ser 2, $-2 + C = 2$. Per tant $C = 4$, $K = 7$. Els alumnes han de dibuixar llavors la gràfica de $y = 2x + 4$ per a $x \leq 1$ i la gràfica de $y = -x + 7$ per a $x \geq 1$.

Aquesta qüestió val 2 punts. Atorgueu-los segons els vostre criteri en funció del que hagi fet cada alumne.

2. $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$, $f'(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$, $f''(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$. La segona derivada s'anul·la per a $x = 1$. L'equació de la recta tangent serà $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, que s'escriu $y - (2/\mathrm{e}) = -(1/\mathrm{e})(x-1)$. Això dóna $y = (3-x)/\mathrm{e}$, que es pot escriure $\mathrm{e}y + x = 3$.

Dels dos punts que val la qüestió, compteu-ne ja 1 per trobar correctament el valor de x que anul·la la segona derivada.

3. Un punt P qualsevol de la recta serà $(1\,,\,-1+\lambda\,,\,1+\lambda)$. El vector $P - A$ serà, doncs, $(0\,,\,\lambda{-}1\,,\,\lambda{+}2)$. Imposem que aquest vector sigui perpendicular a $(0\,,\,1\,,\,1)$. Tindrem:

$$0 = (0\,,\,1\,,\,1)\cdot(0\,,\,\lambda-1\,,\,\lambda+2) = \lambda - 1 + \lambda + 2 = 2\lambda + 1\;,$$

d'on $\lambda = -1/2$. Per tant $P = (1\,,\,-3/2\,,\,1/2)$.

Aquesta qüestió val 2 punts. Atorgueu-los segons els vostre criteri en funció del que hagi fet cada alumne.

4. a) L'equació d'una circumferència de centre $(a\,,\,b)$ i radi R és $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, que s'escriu $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$. Comparant aquesta expressió amb la que ens donen veiem que $2a = 6$, $2b = -4$ i que $a^2 + b^2 - R^2 = 8$. Per tant $a = 3$, $b = -2$ i $R = \sqrt{5}$.

b) Substituint $x = 4$ i $y = 0$ a l'equació que ens han donat veiem que es converteix en la identitat $16 - 24 + 8 = 0$. La direcció del radi que uneix el centre amb el punt $(4\,,\,0)$ vindrà donat pel vector $(4\,,\,0) - (3\,,\,-2) = (1\,,\,2)$. Les rectes perpendiculars a aquesta direcció tenen per equació $x + 2y = C$. Si imposem que passi pel punt $(4\,,\,0)$ tindrem $C = 4$. La recta tangent que ens demanen és, doncs, $x + 2y = 4$.

Compteu 1 punt per apartat.

Problemes

1. a) Com que el punt $P = (1\,,\,1\,,\,3)$ no compleix l'equació del pla, la recta r no podrà mai estar continguda al pla. Podria ser paral·lela al pla quan $\vec{v}$ fos perpendicular al vector $(2\,,\,1\,,\,-1)$ (vector perpendicular al pla). Això passa quan

$$(1 - a\,,\,a\,,\,1) \cdot (2\,,\,1\,,\,-1) = 0\ .$$

És a dir, quan $a = 1$. Per tant, si $a = 1$ la recta és paral·lela al pla, i si $a \neq 1$ la recta talla el pla en un punt.

b) r només pot ser perpendicular al pla π si $\vec{v}$ és proporcional a $(2\,,\,1\,,\,-1)$. És a dir, si

$$\frac{1-a}{2} = \frac{a}{1} = \frac{1}{-1}\ .$$

De l'última equació s'obté $a = -1$. Però per a aquest valor de a no es compleix la primera equació. Conclusió: no hi ha cap valor de a per al qual la recta és perpendicular al pla.

c) La distància de P al pla es pot calcular per la fórmula:

$$d = \frac{|2 \times 1 + 1 \times 1 - 1 \times 3 - 1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\ .$$

Compteu 1,5 punts per l'apartat (a), 1,5 punts per (b) i 1 punt per (c).

2. a) Designem per x la distància entre A i B. En el triangle rectangle ABC tindrem: $\tan 5,6^{\text{o}} = 10/x$. Per tant $x = 10/\tan 5,6^{\text{o}} = 101,98788952$

b) Designem per y la distància del vaixell a la Berta (distància entre V i B). En el triangle BAV l'angle en V val $180 - 81,6 - 75,5 = 22,9^{\text{o}}$. El teorema del sinus aplicat al triangle BAV ens diu que

$$\frac{y}{\sin 75,5^{\text{o}}} = \frac{x}{\sin 22,9^{\text{o}}}\ .$$

D'aquí s'obté $y = (x \sin 75,5)/\sin 22,9 = 253,74777$ metres. L'angle en B és mes gran que l'angle en A. Per tant AV és més gran que BV.

Òbviament no cal que els alumnes facin les operacions amb tants decimals. Compteu 1,5 punts per l'apartat (a) i 2,5 punts per l'apartat (b). Dels 2,5 punts de (b), compteu-ne 1,5 pel càlcul de $y = BV$ i 1 pel raonament final.