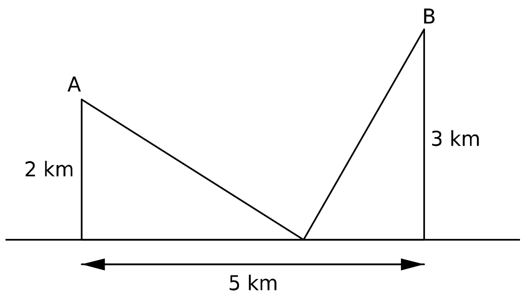
Optimització

1998 - Sèrie 3 - Problema 2

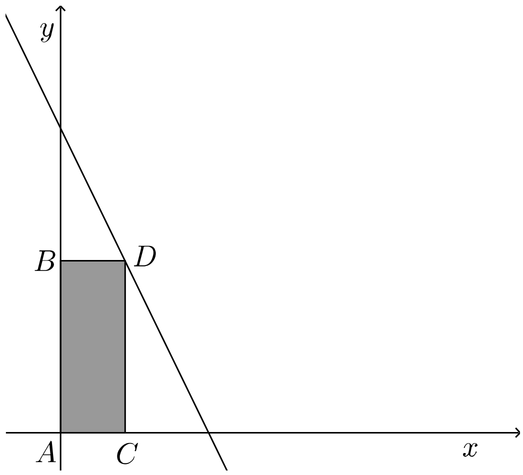
Una via de tren passa a 2 km del poble A i a 3 km del poble B, de manera que el tram de via comprès entre ambdós pobles és de 5 km, tal com s'indica en la figura. Volem construir una nova estació ferroviària i una carretera formada per dos trams rectes que uneixi A amb B passant per l'estació. En quin punt del tram de via hem de col·locar l'estació si volem que el recorregut de A a B passant per la nova carretera sigui mínim? Quina serà la longitud total de la nova carretera?



[4 punts]

1998 - Sèrie 5 - Qüestió 2

Considereu els rectangles del pla, els vèrtexs *A*, *B*, *C* i *D* dels quals compleixen les condicions següents: a) *A* és l'origen de coordenades; b) *B* és a sobre del semieix de les $y > 0$; c) *C* és a sobre del semieix de les $x > 0$; d) *D* és a sobre de la recta d'equació $2x + y = 1$, tal com es veu en la figura següent:

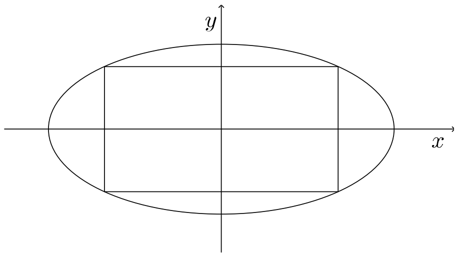


D'entre tots aquests rectangles, trobeu l'àrea del que la té màxima.

[2 punts]

1998 - Sèrie 6 - Qüestió 1

Trobeu els costats d'un rectangle d'àrea màxima inscrit a l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, tal com indica la figura següent:



[2 punts]

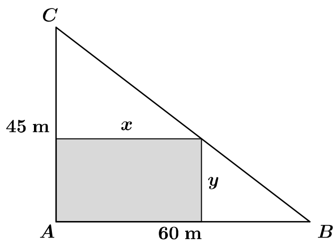
1999 - Sèrie 5 - Qüestió 1

Trobeu l'altura i el radi de la base del cilindre de volum màxim inscrit en una esfera de radi 1.

[4 punts]

2000 - Sèrie 1 - Problema 1

Un terreny té forma de triangle rectangle, els catets mesuren $AB = 60$ m i $AC = 45$ m. En aquest terreny es pot construir una casa de planta rectangular com indica la part ombrejada de la figura següent:



Voleu vendre aquest terreny i us paguen 5.000 pessetes per cada metre quadrat no edificable i 25.000 pessetes per cada metre quadrat edificable.

a) Determineu la relació que hi ha entre l'amplada x i la profunditat y del rectangle que determina la part edificable.

b) Determineu l'expressió que dóna el valor del terreny en funció de l'amplada x del rectangle edificable.

c) Quines són les dimensions de la part edificable que ens permeten obtenir un valor màxim per a aquest terreny?

d) Quin és aquest valor màxim?

[4 punts]

2000 - Sèrie 2 - Problema 1

El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 12 m, i l'altura sobre aquest costat és de 5 m.

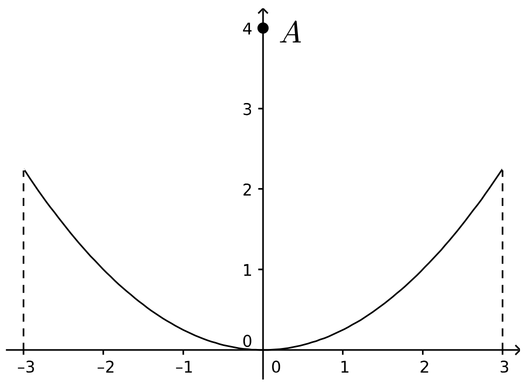
a) Donat un punt arbitrari sobre aquesta altura, obtingueu una expressió de la suma de les distàncies d'aquest punt a cada un dels vèrtexs del triangle.

b) Determineu els punts sobre l'altura que compleixen que la suma de les distàncies als tres vèrtexs del triangle sigui màxima i els punts per als quals sigui mínima.

[4 punts]

2001 - Sèrie 4 - Problema 1

La riba d'un tram de riu descriu la corba $y = \dfrac{1}{4}x^2$ per a x entre -3 i 3, i en el punt $A = (0,4)$ hi ha un poble tal com es pot veure en l'esquema següent:



a) Expresseu la distància des d'un punt qualsevol d'aquesta vora del riu fins al poble, en funció de l'abscissa x.

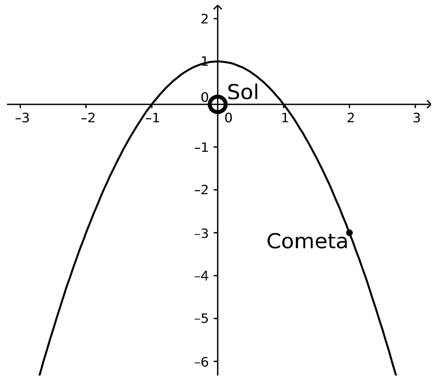
b) Quin és el punt de la vora d'aquest tram de riu que és més lluny del poble?

c) Hi ha algun punt de la vora del riu a una distància del poble inferior a 2?

[4 punts]

2002 - Sèrie 1 - Problema 1

Suposem que el Sol es troba a l'origen d'un sistema de coordenades i que un cometa segueix una trajectòria donada per la paràbola $y = 1 - x^2$, tal com es veu a la figura següent:



a) Quin és el punt en què el cometa es troba més proper al Sol?

b) Quant val en aquest cas la distància del Sol al cometa?

c) Hi ha algun punt en què el cometa es trobi a la màxima distància del Sol?

d) Hi ha algun punt en què la distància entre el Sol i el cometa sigui un màxim local o relatiu?

Nota: Teniu present que la distància entre dos punts és màxima o mínima quan el quadrat de la distància és màxim o mínim.

[4 punts]

2002 - Sèrie 3 - Problema 1

S'ha de construir un gran dipòsit cilíndric de 81π m^3 de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30 € el m^2 i les dues bases amb un material que costa 45 € el m^2.

a) Determineu la relació que hi haurà entre el radi r de les bases circulars i l'altura h del cilindre, i doneu el cost $C(r)$ del material necessari per construir aquest dipòsit en funció de r.

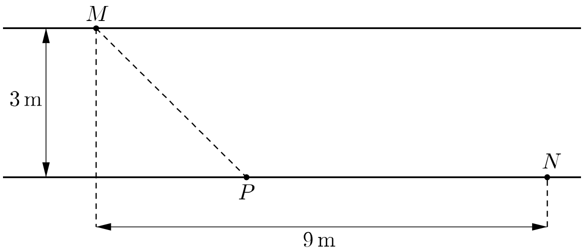
b) Quines dimensions (radi i altura) ha de tenir el dipòsit perquè el cost del material necessari per construir-lo sigui el mínim possible?

c) Quin serà, en aquest cas, el cost del material?

[2 punts l'apartat a) i 1 els altres dos]

2003 - Sèrie 2 - Problema 1

Volem unir el punt *M* situat en un costat d'un carrer de 3 m d'amplada amb el punt *N* situat a l'altre costat i 9 m més avall mitjançant dos cables rectes, un des de *M* fins a un punt *P* situat a l'altre costat del carrer i un altre des de *P* fins a *N* seguint el mateix costat del carrer, segons l'esquema següent:



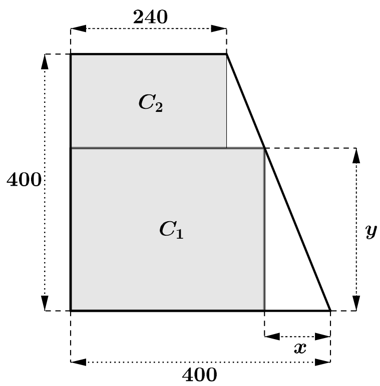
El cost de la instal·lació del cable *MP* és de 12 € per metre i del cable *PN* de 6 € per metre.

Quin punt *P* haurem d'escollir de manera que la connexió de *M* amb *N* sigui tan econòmica com sigui possible? Quin serà aquest cost mínim?

[4 punts]

2003 - Sèrie 3 - Problema 1

Un camp té forma de trapezi rectangle, de bases 240 m i 400 m, i el costat perpendicular a les bases també de 400 m. Es vol partir tal com indica la figura per fer dos camps rectangulars C_1 i C_2. Anomenem *x* i *y* els catets d'un dels triangles rectangles que es formen.



a) Comproveu que $y = \frac{5}{2}x$.

b) Utilitzant la igualtat anterior, escriviu la suma de les àrees dels dos camps en funció de *x*.

c) El camp C_1 es vol sembrar amb blat de moro i el camp C_2 amb blat. Amb el blat de moro s'obté un benefici de 0,12 € per m^2 i amb el blat un benefici de 0,10 € per m^2. Determineu les mides de cada un dels camps per obtenir el benefici màxim.

[1 punt els apartats a) i b) i 2 punts el c)]

2003 - Sèrie 5 - Qüestió 1

Determineu quin és el punt de la gràfica de $y = \sqrt{x}$ (és a dir, de la forma $(x, \sqrt{x})$), que és més a prop del punt $P = (4, 0)$.

[4 punts]

2004 - Sèrie 1 - Problema 6

Donats la funció $f(x) = \sqrt{x}$ i el punt $A(2, 0)$ situat sobre l'eix de les abscisses:

a) Trobeu la funció que expressa la distància del punt A a un punt qualsevol de la gràfica de la funció.

b) Trobeu les coordenades del punt de la gràfica de $f(x)$ més proper a A.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 3 punts. Total: 4 punts]

2005 - Sèrie 1 - Problema 5

La recta tangent a la paràbola $y = 3 - x^2$ en un punt M situat dins del primer quadrant $(x > 0, y > 0)$, talla l'eix OX en el punt A i l'eix OY en el punt B

a) Feu un gràfic dels elements del problema.

b) Trobeu les coordenades del punt M que fan que el triangle OAB tingui l'àrea mínima.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 3 punts. Total: 4 punts]

2005 - Sèrie 3 - Problema 5

Considereu la funció $f(x) = 3 - x^2$ i un punt de la seva gràfica, M, situat en el primer quadrant $(x > 0, y > 0)$. Si pel punt M tracem paral·leles als eixos de coordenades, la seva intersecció amb OX i OY determina dos punts, A i B, respectivament.

a) Feu un gràfic dels elements del problema.

b) Trobeu les coordenades del punt M que fa que el rectangle $OAMB$ tingui l'àrea màxima.

[Puntuació: apartat a) 1 punt; apartat b) 3 punts. Total: 4 punts]

2007 - Sèrie 2 - Problema 5

Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i un volum de 768 m^3. Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2, mentre que a través del sostre és de 300 unitats per m^2. La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem perquè la pèrdua de calor total sigui mínima.

[4 punts]

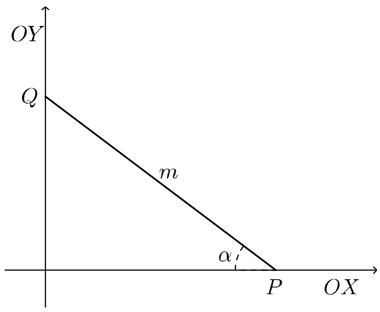
2008 - Sèrie 5 - Problema 6

De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets del triangle que té el perímetre màxim. Comproveu que la solució trobada correspongui realment al perímetre màxim.

[2,5 punts pel càlcul dels catets; 1,5 punts per la comprovació]

2010 - Sèrie 1 - Qüestió 3

Un segment de longitud fixada *m* recolza sobre els eixos de coordenades. Calculeu el valor de l'angle α que forma el segment amb l'eix *OX* perquè el triangle rectangle determinat pel segment amb els eixos i del qual *m* és la hipotenusa tingui àrea màxima. Comproveu que es tracta realment d'un màxim.



[2 punts]

2010 - Sèrie 2 - Qüestió 3

Considereu tots els prismes rectes de base quadrada amb un volum *V* fixat. Anomeneu *x* el costat de la base del prisma i *y* la seva altura.

a) Trobeu l'expressió del volum i de l'àrea total del prisma en funció de les variables *x* i *y*.

b) Comproveu que el que té àrea total mínima és en realitat un cub.

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

2011 - Sèrie 4 - Qüestió 6

Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtexs del rectangle és a la hipotenusa del triangle.

a) Feu un esbós de la situació descrita.

b) Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i y és l'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que $4x + 3y = 12$.

c) Determineu les dimensions del rectangle perquè l'àrea sigui màxima.

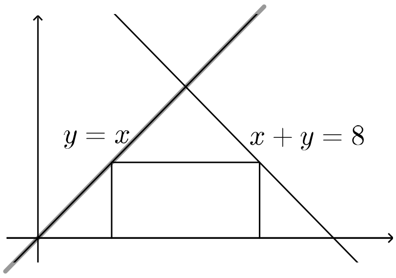
[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

2012 - Sèrie 1 - Qüestió 4

Un rectangle és inscrit en el triangle que té els costats en les rectes d'equacions

$$y = x, \quad x + y = 8, \quad y = 0,$$

i té un costat sobre la recta $y = 0$. Trobeu-ne els vèrtexs perquè la superfície sigui màxima.



[2 punts]

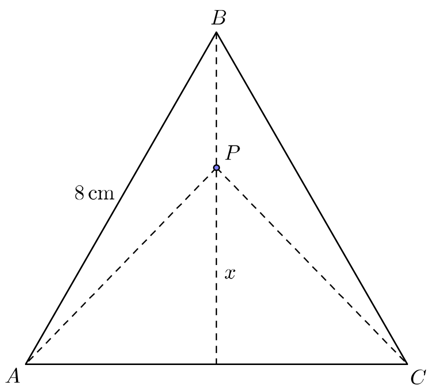
2012 - Sèrie 3 - Qüestió 5

Un triangle equilàter de vèrtexs A, B i C té els costats de 8 cm. Situem un punt P sobre una de les altures del triangle, a una distància x de la base corresponent.

a) Calculeu l'altura del triangle de vèrtexs A, B i C.

b) Indiqueu la distància del punt P a cadascun dels vèrtexs (en funció de x).

c) Determineu el valor de x perquè la suma dels quadrats de les distàncies del punt P a cadascun dels tres vèrtexs sigui mínima.



[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

2012 - Sèrie 4 - Qüestió 4

Una fàbrica produeix diàriament *x* tones d'un producte *A* i $(40 - 5x)/(10 - x)$ tones d'un producte *B*. La quantitat màxima de producte *A* que es pot produir és 8 tones. El preu de venda del producte *A* és 100 € per tona i el del producte *B* és 250 € per tona.

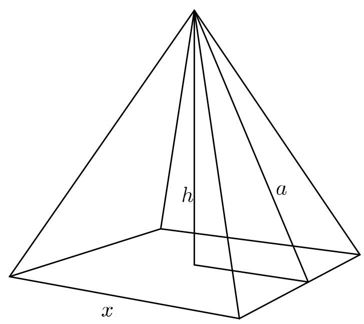
a) Construïu la funció de la variable *x* que ens proporciona els ingressos diaris, suposant que es ven tota la producció.

b) Calculeu quantes tones de cada producte s'han de produir diàriament per a obtenir el màxim d'ingressos, i comproveu que és realment un màxim relatiu.

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

2013 - Sèrie 1 - Qüestió 6

Volem construir una tenda en forma de piràmide regular de base quadrada. Disposem de 300 m^2 de tela per a la fabricació de les quatre cares de la tenda (se suposa que en l'elaboració de les cares no es perd gens de tela). Designem *x* la longitud d'un costat de la base de la tenda.



a) Sabent que el volum d'una piràmide és igual a un terç del producte de l'àrea de la base per l'altura, comproveu que, en aquest cas,

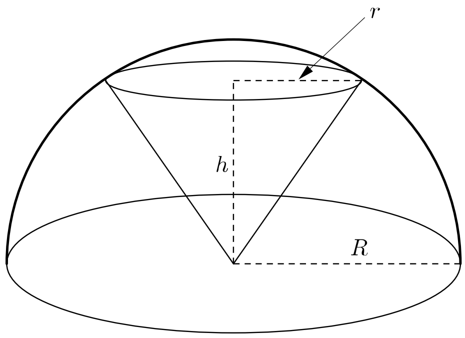
$$V(x) = \frac{x\sqrt{(9\times10^4) - x^4}}{6}$$

b) Determineu el valor de *x* perquè el volum sigui el més gran possible (no cal que comproveu que el valor obtingut correspon realment a un màxim).

[1 punt per cada apartat]

2013 - Sèrie 3 - Qüestió 5

En una semiesfera de radi *R* inscrivim un con situant el vèrtex al centre de la semiesfera, tal com es veu en el dibuix.



a) Sabent que el volum d'un con és igual a l'àrea de la base multiplicada per l'altura i dividida per 3, comproveu que, en aquest cas, podem expressar el volum com

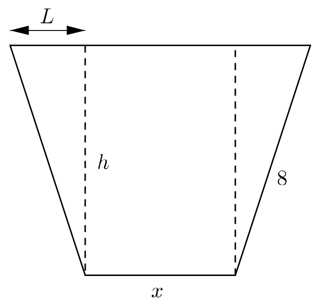
$$V = \frac{\pi \cdot h}{3}\left(R^2 - h^2\right)$$

b) Trobeu les dimensions d'aquest con (el radi de la base i l'altura) perquè el seu volum sigui màxim i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

[0,5 punts per l'apartat a; 1,5 punts per l'apartat b]

2013 - Sèrie 4 - Qüestió 4

Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres. A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.



a) Trobeu el valor del segment *L* de la gràfica en funció de la variable *x* (amplària inferior del canal).

b) Sabem que l'àrea d'un trapezi és igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

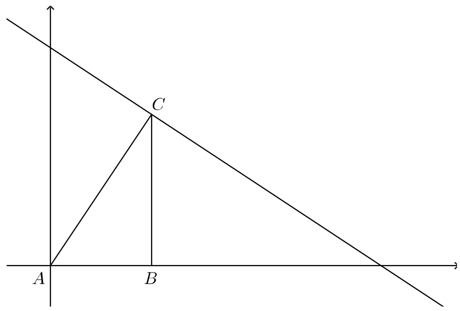
$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$$

c) Calculeu el valor de *x* perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).

[0,5 punts per l'apartat a; 0,5 punts per l'apartat b; 1 punt per l'apartat c]

2013 - Sèrie 5 - Qüestió 6

Un triangle rectangle situat en el primer quadrant té el vèrtex A en l'origen de coordenades, el vèrtex $B = (x, 0)$ en el semieix positiu d'abscisses i el vèrtex C pertany a la recta $x + 2y = 8$. L'angle recte és el que correspon al vèrtex B.



a) Comproveu que l'àrea del triangle es pot expressar de la manera següent: $A(x) = 2x - \dfrac{x^2}{4}$

b) Trobeu els vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle sigui màxima i comproveu que es tracta realment d'un màxim.

[1 punt per cada apartat]

2014 - Sèrie 3 - Qüestió 3

Un nedador és al mar en un punt N, situat a 3 km d'una platja recta, i just al davant d'un punt S, situat a la platja arran de l'aigua; i vol anar a un punt A, situat també arran de l'aigua i a 6 km del punt S, de manera que el triangle NSA és rectangle en el vèrtex S. El nedador neda a una velocitat constant de 3 km/h i camina a una velocitat constant de 5 km/h.

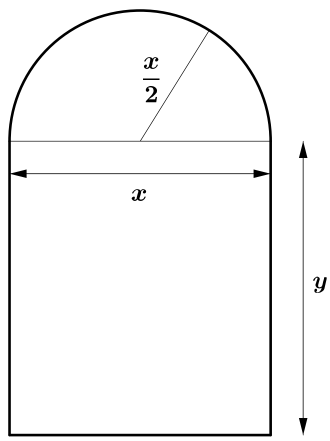
a) Si P és un punt entre el punt S i el punt A que està a una distància x de S, demostreu que el temps, en hores, que necessita el nedador per a nedar del punt N al punt P i caminar des del punt P fins al punt A és determinat per l'expressió $t(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \dfrac{6 - x}{5}$.

b) Calculeu el valor de x que determina el temps mínim que cal per a anar del punt N al punt A, passant per P. Quin és el valor d'aquest temps mínim?

[2 punts. 1 punt cada apartat]

2015 - Sèrie 2 - Qüestió 6

La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què x és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i y és l'alçària de cada columna.



a) Comproveu que la funció $f(x, y) = \dfrac{\pi x^2}{8} + xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.

b) Si el perímetre de la portalada fa 20 m, determineu les mides x i y de la portalada que en maximitzen l'àrea .

[2 punts. 1 punt cada apartat]

2015 - Sèrie 5 - Qüestió 5

Siguin x i y les mesures dels costats d'un rectangle inscrit en una circumferència de diàmetre 2.

a) Comproveu que la superfície del rectangle, en funció de x, és donada per l'expressió

$$S(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$$

b) Calculeu els valors de les mesures x i y per als quals la superfície del rectangle és màxima i calculeu el valor d'aquesta superfície màxima.

[1 punt cada apartat]

2016 - Sèrie 1 - Qüestió 3

Volem fer un envàs de gelat amb forma de prisma regular de base quadrada i amb una capacitat de 80 cm^3. Per a elaborar-ne la tapa i la superfície lateral, farem servir un material determinat que costa 1 €/cm^2, però per a la base haurem d'utilitzar un material que és un 50 % més car.

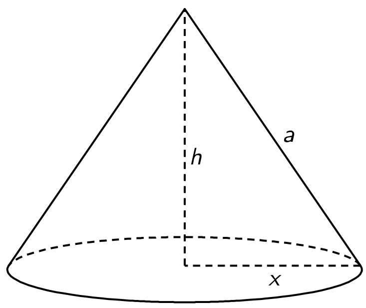
a) Si x és la mesura, en cm, del costat de la base, comproveu que la funció que determina el preu de l'envàs és $P(x) = 2{,}5x^2 + \dfrac{320}{x}$

b) Calculeu les mides que ha de tenir l'envàs perquè el preu sigui el mínim possible.

[1 punt cada apartat]

2017 - Sèrie 1 - Qüestió 6

Considereu un con de 120 cm^3 de volum que té una altura h, un radi de la base x i una aresta a, com el de la figura següent:



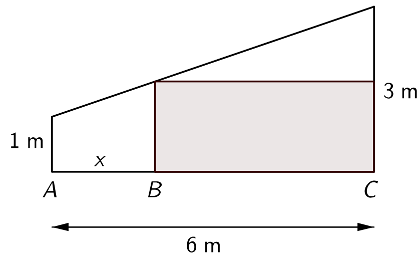
a) Comproveu que $a^2 = \dfrac{360}{\pi}\cdot\dfrac{1}{h} + h^2$.

b) Calculeu l'altura del con que té l'aresta de longitud mínima.

[1 punt cada apartat]

2017 - Sèrie 5 - Qüestió 6

El croquis de sota representa la paret d'unes golfes amb el sostre inclinat, en la qual es vol construir un armari rectangular com el de la zona ombrejada.



a) Expresseu l'àrea del rectangle en funció de la longitud *x* del segment *AB*.

b) Determineu les dimensions del rectangle si volem que tingui una superfície màxima i calculeu aquesta superfície màxima.

[1 punt cada apartat]