

1 Sistemes d'equacions lineals

1.1 Mètode de Gauss

Exercici 1: Resol i classifica els sistemes següents tot donant una interpretació geomètrica:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 7 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ -x + 5y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Exercici 2: Posa un exemple de sistema compatible indeterminat amb 3 equacions i 2 incògnites. Interpreta'l geomètricament

Exercici 3: Resol pel mètode de Gauss i classifica els sistemes següents:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y - z = -5 \\ x + 2y - z = -5 \\ 5x + y + z = 11 \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} 12x + 13y + 14z = 80 \\ 8x - 9y - 10z = -40 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 5 \\ 3x - 4y = 18 \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y = z \\ 2x + z = 4 + y \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x - y = 2 \\ 2x + 25y = 0 \end{cases}$$

$$\text{j) } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + 3z = 3 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

$$\text{k) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -10 \\ x + 3y + z = -2 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + y + 3z = 10 \\ 2x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{l) } \begin{cases} 4x + 3y + 5z = 10 \\ -3x + y + z = -6 \\ 2x - 2y + 6z = 12 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a - b = 2 - c \\ a - 2b = 1 \end{cases}$$

$$\text{m) } \begin{cases} 2x + 3y - z = -2 \\ -5x + 2y + z = 3 \\ -3x - y - 2z = -1 \\ 2x - y - 3z = 2 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} x + 7y - 3z - 3 = 0 \\ 4x + y + 2z - 5 = 0 \\ 7x - 5y + 7z - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\text{n) } \begin{cases} -2x + 3y + 5z + t = 12 \\ 2x + 2y + 3z + t = 8 \\ 3x + 4y = 8 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Exercici 4: (*Juny 05*) Resoleu el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

Exercici 5: (*Set. 04*) Discutiu, i en el seu cas resoleu, el sistema següent:

$$\begin{cases} 4x + 6y - 8z = 2 \\ 6x + 9y - 12z = 3 \\ x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

1.2 Problemes

Exercici 6: Tenim 3 quantitats de diners que sumen 4.500 euros. El 40% de la primera més el 50% de la segona dóna 1.300 euros. El 50% de la segona més el 60% de la tercera dóna 1.400 euros. Calcula aquestes quantitats.

Exercici 7: Un capital de 10.000 euros produeix anualment uns interessos de 540 euros. Una part dels diners es van col·locar al 6% d'interès i l'altra al 5%. Quants diners es van col·locar a cada tipus d'interès ?

Exercici 8: Els animals d'un laboratori han d'observar una dieta estricta. Cada animal rep 10 g de proteïnes i 3 g de greixos. Es disposa de dos tipus d'aliments: el tipus *A*, que conté un 5% de proteïnes i un 3% de greixos, i el tipus *B*, que conté un 10% de proteïnes i un 1 % de greixos.

Quants grams de cada aliment es poden utilitzar a fi d'obtenir la dieta correcta d'un únic animal ?

Exercici 9: Busca 3 nombres tals que el doble del primer menys el triple del segon més el tercer sigui igual a 4. La suma del primer i el segon sigui igual al tercer. La suma del segon, el tercer i 4 sigui igual a quatre vegades el primer. És única la solució ? En cas afirmatiu dóna dues solucions.

Exercici 10: Troba un polinomi de 2n grau que verifiqui:

$$p(1) = 2, \quad p(2) = 3, \quad p(3) = 6$$

Exercici 11: Una certa setmana els articles *A*, *B* i *C* es rebaixen el 5%, 6% i 8% el dilluns. El 2%, 8% i 6% el dimarts. El 4%, 2% i el 5% divendres. Sabent que un client adquirint aquests articles s'estalvia : 181 euros el dilluns, 162 euros el dimarts i 100 euros el divendres, està determinat el preu dels articles *A*, *B* i *C* ?

Exercici 12: La suma de les edats de tres persones és, en el moment actual, 73 anys. D'aquí a 10 anys, l'edat de la persona més gran serà el doble que la persona més jove. Fa 12 anys la persona amb l'edat intermèdia tenia el doble d'anys que la més jove. Troba les edats de les tres persones.

Exercici 13: En un jardí hi ha 22 arbres entre tarongers, llimoners i codonyers. El doble del nombre de llimoners més el triple del nombre de codonyers és igual al doble del nombre de tarongers.

- És possible saber amb aquestes dades el nombre de tarongers que hi ha?
- Si a més se sap que el nombre de tarongers és el doble que el de llimoners, quants arbres hi ha de cada tipus?

Exercici 14: (*Juny 06*) La despesa mensual en salaris d'una empresa de 36 treballadors és de 54900€. Hi ha tres categories de treballadors que indicarem per A, B i C. El salari mensual d'un treballador de la categoria A és de 900€, el d'un de la B és de 1500€ i el d'un de la C és de 3000€. Sense acomiadar ningú, l'empresa vol reduir la despesa salarial en un 5%. Per fer-ho ha rebaixat un 5% el salari dels de la categoria A, un 4% els de la B i un 7% els de la C. Esbrineu quants treballadors hi ha de cada categoria.

Exercici 15: (*Juny 05*) Una marca comercial utilitza tres ingredients A, B i C en l'elaboració de tres tipus de pizzes P1, P2 i P3. La pizza P1 s'elabora amb 1 unitat de A, 2 de B i 2 de C; la P2 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 1 de C; P3 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 2 de C. El preu de venda al públic és de 4,80€ per P1, 4,10€ per P2 i 4,90€ per P3. Sabent que el marge comercial (benefici) és de 1,60€ en cadascuna d'elles, trobeu què li costa a l'esmentada marca comercial cada unitat de A, B i C.

Exercici 16: (*Juny 05*) El preu d'un bitllet d'una línia d'autobusos és la suma d'una quantitat fixa i una altra proporcional al nombre de quilòmetres del recorregut. S'han pagat 18€ per un bitllet a una població que dista 500 km., i 33€ per un altre a una ciutat que dista 1000 km. Quant haurem de pagar per un bitllet a una població que està a 250 km?

Exercici 17: (*Juny 04*) La Joana i la Mercè tenien 20000€ cadascuna per invertir. Cadascuna d'elles fa la mateixa distribució dels seus diners en tres parts P, Q i R i els porta a una entitat financera. Al cap d'un any, a la Joana li han donat un 4% d'interès per la part P, un 5% per la part Q i un 4% per la part R i a la Mercè li han donat un 5% per la part P, un 6% per la part Q i un 4% per la part R. La Joana ha rebut en total 850€ d'interessos, mentre que la Mercè n'ha rebut 950€. De quants € constava cadascuna de les parts P, Q i R?

Exercici 18: (*Juny 04*) Un venedor té un salari mensual que ve determinat per un sou fix més un cert percentatge sobre el volum de vendes que ha fet durant el mes. Si ven per valor de 2000€, el seu salari és de 1200€ i, si ven per valor de 2500€, el salari és de 1300€. Trobeu el percentatge que guanya sobre el total de vendes i el sou fix.

1.3 Determinants. Mètode de Cramer.

Exercici 19: Calcula el valor dels determinants següents:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \text{e)} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \text{g)} \begin{vmatrix} x+y & 2x \\ y & x+y \end{vmatrix} \\
 \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \text{d)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} & \text{f)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} & \text{h)} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

Exercici 20: Resol les equacions següents:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \begin{vmatrix} 4 & x \\ x & 7 \end{vmatrix} = 12x & \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & x \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \text{c)} \begin{vmatrix} 2 & x & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0
 \end{array}$$

Exercici 21: Resol els sistemes següents per la regla de Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ -3x + 4y = 14 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x - 3y = -14 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 4x - 3y = -20 \end{cases}$$

Exercici 22: Resol els sistemes següents:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y = 2x + y - 3 \\ 4 - 5x = -2(x + y) \\ 3y = 2x + 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -x + 2y = 2x - y + z \\ 3x = 2y + 2 \\ 5x = -2y + 3z - 1 \end{cases}$$

Exercici 23: Resol els sistemes següents fent servir la regla de Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - y + z = 9 \\ x + 2y = 4 \\ 5y - z = 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 0.2x - 0.3y + 1.2z = 0.5 \\ x + 1.4y + 0.8z = -0.4 \\ 1.5x + y - 0.7z = -0.5 \end{cases}$$

Exercici 24: Aïlla x i y del sistema: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$, sabent que $a \cdot e \neq d \cdot b$.

1.4 Teorema de Rouché-Frobenius. Discussió de sistemes.

Exercici 25: Troba el rang de les matrius següents:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercici 26: Troba el rang de les matrius:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercici 27: Donada la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & k & 1 \\ 2 & k & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ troba } k \text{ per a que } \text{rang}(A) = 2.$$

Exercici 28: Troba segons els valors del paràmetre a el rang de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & a \\ 1 & -a & 2 \end{pmatrix}$$

Exercici 29: Classifica els sistemes següents:

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 5 \\ -x - 3y + z = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x - y + z = 5 \\ x - 2y + 3z = 8 \\ x + 5y - 8z = -19 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 10 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

Exercici 30: Troba λ per a que el sistema següent sigui compatible determinat:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 17 \\ 3x - y = 0 \\ \lambda x + y = 1 \end{cases}$$

Exercici 31: (Juny 06) Discutiu en funció del paràmetre p el sistema d'equacions lineals de matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & p+5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array} \right)$$

Exercici 32: Discuteix el sistema següent segons els diferents valors de k :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ x + 2y + z = 8 \\ 2x + 3y + kz = 17 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + ky + 2z = 3 \\ x + 6y + z = 4 \end{cases}$$

Exercici 33: Discuteix el sistema segons els diferents valors d' α :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - z = -1 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \\ 2x + \alpha y + 3z = 8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ z + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

Exercici 34: (Set. 06) Discutiu en funció del paràmetre a el sistema següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 5x + y - z = 11 \\ 3x - y + az = 2 \end{cases}$$

Exercici 35: Discuteix i resol, en cas de compatibilitat, els següents sistemes:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x - ay = 14 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} ax + y + z = a + 1 \\ x + 2y - 2z = a - 2 \\ x + ay + z = a + 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 4 \\ ax - y + z = 2 \\ 6x + 5y - 3z = 5a \end{cases}$$

Exercici 36: Discuteix i resol, en cas de compatibilitat, els següents sistemes:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 58 \\ 3x - 4y = -56 \\ 4x - 5y = \lambda \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2y + az = a \\ x + 4y + a^2z = 6 + a \\ x - 8y + a^2z = -6 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} ax + y - z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ z - y + az = a \end{cases}$$

Exercici 37: (Juny 04) Discuti i, en el seu cas, resoleu el sistema següent segons els valors del paràmetre a :

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = a \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

Exercici 38: (*Juny 06*) Discuti en funció del paràmetre m el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Solucions dels exercicis

Exercici 1: a) sist. comp. determinat amb sol. $x = 1$ i $y = 3$ b) sistema incompatible

Exercici 3: a) $x = 2, y = -2z = 3$ b) $x = 2, y = -3$ c) Incompatible d) $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2} - \lambda, z = \lambda$ e) $x = 4y = 3z = 1$ f) $a = 1 + 2\lambda, b = \lambda, c = -3\lambda$ g) Incompatible h) $x = 1, y = 2, z = 3$ i) $x = \frac{22}{7}, y = \frac{19}{7}, z = \frac{3}{7}$ j) $x = -3, y = 2, z = 2$ k) $x = 1, y = -2, z = 3$ l) $x = 2, y = -1, z = 1$ m) Incompatible n) $x = 0, y = 2, z = 1, t = 1$

Exercici 4: $(x, y, z) = (1, 1, -1)$

Exercici 5: SCI amb 1 grau de llibertat. $(x, y, z) = (-28, 19, 0) + \lambda(11, -6, 1)$.

Exercici 6: 2.000, 1.000 i 1.500 euros.

Exercici 7: 6000 i 4000 respectivament.

Exercici 8: 80 g de tipus A i 60 g de tipus B.

Exercici 9: Té infinites solucions. $x = \frac{2k+4}{5}, y = \frac{3k-4}{5}$ i $z = k$, on $k \in \mathbb{R}$.

Exercici 10: $p(x) = x^2 - 2x + 3$

Exercici 11: No està determinat

Exercici 12: 40, 18 i 15 anys

Exercici 13: a) No. b) 12 tarongers, 6 llimoners i 4 codonyers.

Exercici 14: 11 de classe A, 20 de classe B i 5 de classe C.

Exercici 15: 0.60, 0.50, 0.80 respectivament.

Exercici 16: 10,50€

Exercici 17: $P = Q = 5000e, R = 10000e$.

Exercici 18: Sou=800€, percentatge=20%.

Exercici 19: a) -10 b) 0 c) -16 d) 2 e) -6 f) -2 g) $x^2 + y^2$ h) 6

Exercici 20: a) $x = 2, -14$ b) $x = \frac{29}{3}, -1$ c) $x = \frac{3}{4}$

Exercici 21: a) $x = 2, y = 5$ b) $x = -1, y = 3$ c) $x = -2, y = 4$

Exercici 22: a) $x = 1, y = 2$ b) $x = -\frac{16}{7}, y = -\frac{31}{7}, z = -\frac{45}{7}$

Exercici 23: a) $x = 1, y = -1, z = 2$ b) $x = 2, y = 1, z = 4$ c) $x = 1, y = -1, x = 0$

Exercici 24: $x = \frac{ce-fb}{ae-bd}, y = \frac{af-dc}{ae-bd}$

Exercici 25: a) 2 b) 3 c) 1 d) 2 e) 2 f) 3

Exercici 26: a) 3 b) 2 c) 2

Exercici 27: $k = \frac{-3}{7}$

Exercici 28: Si $a = 6$ ó 1 el rang és 2. En cas contrari el rang és 3.

Exercici 29: a) comp. det. b) comp. indet. c) incompatible

Exercici 30: $\lambda = -2$

Exercici 31: Per $p = 1$ SCI amb 1 grau de llibertat. Per $p = -5$ SI. Per $p \neq 1$ i $p \neq -5$ SCD.

Exercici 32: a) Si $k \neq 3$ sist. comp. det. Si $k = 3$ comp. indet. b) Si $k \neq 5$ sist. comp. det. Si $k = 5$ sist. incomp.

Exercici 33: a) Si $\alpha \neq 1$ sist. comp. det. Si $\alpha = 1$ sist. comp. indet. b) Si $\alpha = 1$

sist. comp. indet. Si $\alpha = -2$ sist. incomp. Si $\alpha \neq 1, -2$ sist. comp. det.

Exercici 34: $a = -3$ SI. $a \neq -3$ SCD.

Exercici 35: a) Si $a \neq -2$ comp. det.: $x = \frac{7}{2}, y = 0$. Si $a = -2$, comp. indet.: $x = \lambda, y = 7 - 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

b) Si $a \neq -\frac{5}{2}, a \neq 1$ comp. det.: $x = \frac{3a}{2a+5}, y = \frac{3a}{2a+5}, z = \frac{-a^2+4a+5}{2a+5}$. Si $a = 1$ comp. indet.: $x = 5 - 4\lambda, y = -3 + 3\lambda, z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$. Si $a = -\frac{5}{2}$ incompatible.

c) Si $a = 2$ comp. indet.: $x = \frac{8-y}{6}, z = \frac{4y-2}{3}, y \in \mathbb{R}$. Si $a \neq 2$ comp. det.: $x = -5, y = 2(9 + 5a), z = 5(4 + 3a)$.

Exercici 36: a) Si $\lambda \neq -67$ incomp. Si $\lambda = -67$ comp. det.: $x = 12, y = 23$.

b) Si $a \neq 0, a \neq 1$ comp. det.: $x = \frac{-12+8a+7a^2}{6(a-1)}, y = \frac{12+a}{12}, z = \frac{-1}{2(a-1)}$. Si $a = 0$ comp. indet.: $x = 2, y = 1, z \in \mathbb{R}$. Si $a = 1$ incomp.

c) Si $a \neq -1$ comp. det.: $x = \frac{2a^2-a+3}{a^3+a+2}, y = \frac{a^2-2a+3}{a^3+a+2}, z = \frac{a^2-a+1}{a^2-a+2}$. Si $a = -1$ incomp.

Exercici 37: Per $a \neq 1$ SI. Per $a = 1$ SCD amb solució $x = 2, y = -1$.

Exercici 38: $m = -1$ SI. $m \neq -1$ SCI amb 1 grau de llibertat. $x = \frac{1+2m}{1+m} - \lambda, y = \lambda \in \mathbb{R}, z = -\frac{1}{1+m}$