Exercicis de nombres complexos

Definició de nombre complex

1. Calcula les següents arrels quadrades:

a) $\sqrt{-16}$ b) $\sqrt{-2}$ c) $\sqrt{-72}$ d) $\sqrt{-\frac{49}{16}}$

2. Quin ha de ser el valor de $k \in \mathbb{R}$ perquè el nombre complex $(2k+4)-(3k-9)i$ sigui un nombre real?

3. Quin ha de ser el valor de $k \in \mathbb{R}$ perquè el nombre complex $(k+3)+(k+7)i$ sigui un nombre imaginari pur?

4. Resol en el conjunt $\mathbb{C}$ dels nombres complexos, les equacions següents:

a) $x^2+169=0$ b) $75x^2+48=0$ c) $x^2+x+1=0$

d) $x^2+4x+5=0$ e) $x^2-4x+13=0$

5. Donats els nombres complexos $z_1=2+(2m-10)i$ i $z_2=(m-3)+2i$, amb $m \in \mathbb{R}$, existeix algun valor de m que verifiqui que $z_1=z_2$?

6. Representa els afixos dels nombres complexos $z_1=-4$, $z_2=2i$, $z_3=5+2i$ i $z_4=1-4i$.

7. Representa els afixos dels següents nombres i dels seus oposats i conjugats:

a) $z_1=4+2i$ b) $z_2=3-4i$ c) $z_3=3i$ d) $z_4=-3$

8. Escriu els nombres complexos següents en forma polar i en forma trigonomètrica:

a) $z_1=-\sqrt{3}+i$ b) $z_2=\sqrt{6}-\sqrt{6}i$ c) $z_3=-12i$ d) $z_4=0$

9. Escriu els següents nombres en forma binòmica:

a) $z_1=\sqrt{6}_{315°}$ b) $z_2=10_{210°}$ c) $z_3=4_{90°}$ d) $z_4=2_{180°}$

10. Escriu en forma polar el nombre complex $z=1+\sqrt{3}i$, el seu conjugat i el seu oposat.

Operacions amb nombres complexos en forma binòmica

11. Calcula les sumes i restes següents:

a) $(9+11i)+(5+i)=$ b) $(7-3i)-(2-5i)=$

c) $3i+(8+2i)=$ d) $(-11-6i)-(-2+3i)=$

12. Calcula els productes següents:

a) $(6+3i)\cdot(-4+2i)=$ b) $(3-2i)\cdot(4-i)=$

c) $5i\cdot(3+7i)=$ d) $(-1+2i)\cdot(3+4i)=$

13. Calcula les divisions següents:

a) $\dfrac{15+25i}{4+2i}=$ b) $\dfrac{2-3i}{3-2i}=$

c) $\dfrac{3i}{1+3i}=$ d) $\dfrac{6-4i}{i}=$

14. Calcula $k\in\mathbb{R}$ perquè els següents resultats siguin nombres reals:

a) $(5-4i)+(-3+ki)$ b) $(k-12i)-(8-3ki)$

c) $(6+7i)\cdot(9-11ki)$ d) $\dfrac{5-4i}{2+ki}$

15. Calcula:

$$\frac{10-4i}{2+i}+\frac{6+3i}{1-2i}-\frac{1-3i}{1+3i}=$$

16. Se sap que el quocient $\dfrac{3+2\lambda i}{2+i}$, amb $\lambda\in\mathbb{R}$, és un nombre real. Troba el valor de λ. Quin hauria de ser el valor de λ perquè aquest quocient fos imaginari pur?

17. Troba el valor de $\lambda\in\mathbb{R}$ que fa que el resultat de fer la divisió $\dfrac{2+i}{\lambda+i}$ tingui un afix representat a la bisectriu del primer i del tercer quadrants.

18. Calcula les potències següents en forma binòmica:

a) $(6i)^3=$ b) $(-2i)^7=$ c) $(2i)^{10}=$ d) $\left(\sqrt[3]{5}i\right)^{15}=$

e) $(3+i)^3=$ f) $(1-i)^4=$ g) $(2+3i)^5=$ h) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^6=$

19. Demostra que per a qualsevol nombre complex $z = a + b\,i$ es verifica que:

a) $z + \bar{z}$ és un nombre real

b) $z - \bar{z}$ és un nombre imaginari pur

c) $z \cdot \bar{z}$ és un nombre real

Operacions amb nombres complexos en forma polar

20. Calcula les multiplicacions i divisions següents en forma polar:

a) $(\sqrt{3} + i) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2}i) =$ b) $(2 + i) \cdot \sqrt{2}_{45°} =$ c) $\dfrac{3 + 5\,i}{4 + i} =$

d) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right) =$ e) $\dfrac{1 - i}{1 + i} =$

21. Calcula les potencies següents en forma polar:

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{6}\,i)^4 =$ b) $(-1 - i)^{11} =$ c) $(3 - \sqrt{3}\,i)^5 =$

d) $(2 + 2\,i)^{-3} =$ e) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^{333} =$

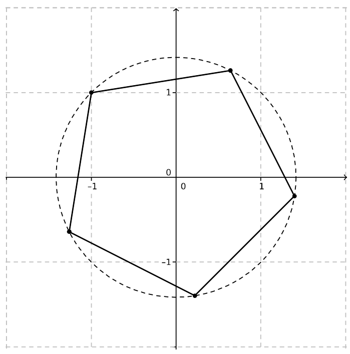
22. Donat el nombre complex $z = 2 + \dfrac{3}{2}i$, expressa en forma polar i binòmica i representa gràficament els afixos de z i de l'invers de z.

23. Expressa en forma polar i binòmica i representa gràficament els afixos de les arrels quartes del nombre complex -64.

24. Troba les arrels vuitenes del nombre complex 1. Demostra que el producte de dues qualssevol d'aquestes arrels és també una arrel.

25. Una de les arrels quartes d'un nombre complex z és $1 + 3i$. Quin és aquest nombre complex? Quines són les altres tres arrels? Expressa els resultats en la forma més adient.

26. Escriu en forma els polars els nombres complexos afixos que tenen per afixos els vèrtexs del pentàgon regular de la següent figura. Expressa els resultats en la forma més adient.



Resolució d'equacions en el conjunt dels nombres complexos

27. Escriu una equació de segon grau que tingui com a solucions $2 + 4i$ i el seu conjugat.

28. Resol en el conjunt $\mathbb{C}$ dels nombres complexos, les equacions següents:

a) $x^3 + 2x^2 + 9x + 18 = 0$

b) $x^4 + x^2 - 12 = 0$

c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

d) $x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x^2 + 2x - 2 = 0$

Solucions

1. a) $\pm 4i$ b) $\pm\sqrt{2}i$ c) $\pm 6\sqrt{2}i$ d) $\pm\frac{7}{4}i$

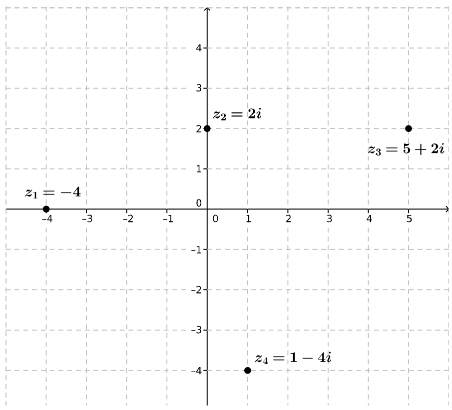
2. $k=3$

3. $k=-3$

4. a) $x=\pm 13i$ b) $x=\pm\frac{4}{5}i$ c) $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ d) $x=-2\pm i$ e) $x=-2\pm 3i$

5. No hi ha cap valor de m que satisfaci a la vegada $m-3=2$ i $2m-10=2$

6.

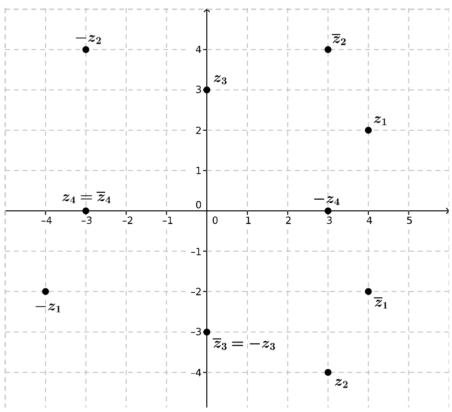


7. a) $-z_1=-4-2i$ $\bar{z}_1=4-2i$

   b) $-z_2=-3+4i$ $\bar{z}_2=3+4i$

   c) $-z_3=-3i$ $\bar{z}_3=-3i$

   d) $-z_4=3$ $\bar{z}_4=-3$



8. a) $z_1=2_{150°}=2\cdot(\cos 150°+i\cdot\sin 150°)$

   b) $z_2=2\sqrt{3}_{-45°}=2\sqrt{3}\cdot(\cos(-45°)+i\cdot\sin(-45°))$

   c) $z_3=12_{-90°}=12\cdot(\cos(-90°)+i\cdot\sin(-90°))$

   d) No està definida la forma polar d'aquest nombre.

9. a) $z_1=\sqrt{3}-\sqrt{3}i$ b) $z_2=-5\sqrt{3}-5i$ c) $z_3=4i$ d) $z_4=-2$

10. $z=2_{60°}$ $\bar{z}=2_{-60°}=2_{300°}$ $-z=2_{-120°}=2_{240°}$

11. a) $14+16i$ b) $5+2i$ c) $8+5i$ d) $-9-9i$

12. a) -30 b) $10-11i$ c) $-35+15i$ d) $-11+2i$

13. a) $\frac{11}{2}+\frac{7}{2}i$ b) $\frac{12}{13}-\frac{5}{13}i$ c) $\frac{9}{10}+\frac{3}{10}i$ d) $-4-6i$

14. a) $k=4$ b) $k=4$ c) $k=\frac{21}{22}$ d) $k=-\frac{8}{5}$

15. 4

16. El quocient és real si $\lambda=\frac{3}{4}$ i és imaginari si $\lambda=-3$.

17. $\lambda=-3$

18. a) $-216i$ b) $128i$ c) -1024 d) $-3125i$
e) $18+26i$ f) $-2-2i$ g) $122-597i$ h) $64i$

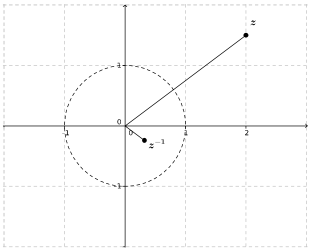
19. a) $z+\bar{z}=2a$ b) $z-\bar{z}=2bi$ c) $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$

20. a) 4_{75° b) $\sqrt{10}_{71,57^\circ}$ c) $\sqrt{2}_{45^\circ}$ d) $1_{0^\circ}=1$ e) $1_{270^\circ}=-i$

21. a) 64_{240° b) $32\sqrt{2}_{315^\circ}$ c) $288\sqrt{3}_{210^\circ}$ d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{32}\right)_{225^\circ}$ e) $1_{270^\circ}=-i$

22. $z=2+\frac{3}{2}i=\left(\frac{5}{2}\right)_{36,87^\circ}$

$z^{-1}=\frac{8}{25}-\frac{6}{25}i=\left(\frac{2}{5}\right)_{-36,87^\circ}$

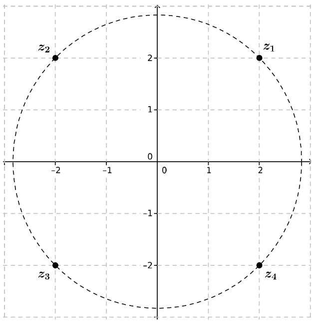


23. $z_1=2\sqrt{2}_{45^\circ}=2+2i$

$z_2=2\sqrt{2}_{135^\circ}=2-2i$

$z_3=2\sqrt{2}_{225^\circ}=-2-2i$

$z_4=2\sqrt{2}_{315^\circ}=-2+2i$



24. $z_i=1_{i\cdot 45^\circ}$ amb $i\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$\left(z_i\cdot z_j\right)^8=z_i^8\cdot z_j^8=1\cdot 1=1$

25. El nombre complex és $28-96i$. Les altres tres arrels són $z_2=-3+i$, $z_3=-1-3i$ i $z_4=-3+i$.

26. $z_1=\sqrt{2}_{135^\circ}$ $z_2=\sqrt{2}_{207^\circ}$ $z_3=\sqrt{2}_{279^\circ}$ $z_4=\sqrt{2}_{351^\circ}$ $z_5=\sqrt{2}_{63^\circ}$

27. Per exemple: $x^2-4x+20=0$

28. a) $x_1=-2$, $x_2=3i$ i $x_3=-3i$ b) $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=2i$ i $x_4=-2i$
c) $x_1=2_{0^\circ}$, $x_2=2_{120^\circ}$, $x_3=2_{240^\circ}$, $x_4=1_{180^\circ}$, $x_5=1_{300^\circ}$ i $x_6=1_{60^\circ}$
d) $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=i$, $x_4=-i$, $x_5=1+i$ i $x_6=1-i$